Projective structures on surfaces and limits of quasi-Fuchsian groups (Hyperbolic Spaces and Discrete Groups)

糸, 健太郎

数理解析研究所講究録 1223 巻 2001 年 19-30

Projective structures on surfaces and limits of quasi-Fuchsian groups

糸 健太郎 (Kentaro Ito)
名古屋大学大学院 多元数理科学研究科

1 クライン群の変形空間

M を向き付け可能な境界付きコンパクト3次元多様体で，その内部 int$M$ には双曲構造が入るとする．すなわち，あるクライン群 $\Gamma \subset \mathrm{PSL}_2(\mathbf{C})$ が存在して int$M \cong N_\Gamma = \mathbf{H}^3/\Gamma$ であるとする．表現空間

$$R(M) = \mathrm{Hom}(\pi_1(M), \mathrm{PSL}_2(\mathbf{C}))/\mathrm{PSL}_2(\mathbf{C})$$

の部分集合

$$AH(M) = \{[\rho] \in R(M) | \rho \text{ is faithful and discrete}\}$$

を考える．これは複素力学系におけるマンデルブロー集合に対応するものと思うことができる．ここで $R(M)$ には代数的位相（各点収束の位相）を入れておく．このとき $AH(M)$ は閉集合で，その内点集合 int$AH(M)$ は minimally parabolic な表現全体 $MP(M)$ と一致する．ここで $[\rho] \in AH(M)$ が minimally parabolic であるとは $\rho(g)$ が parabolic ならば g が $\pi_1(M)$ の rank 2 free abelian subgroup の元であるときをいう．$\overline{MP(M)} = AH(M)$ であろうと予想されている (Bers-Thhurston 予想)．$MP(M)$ 自体は complex manifold であるが，その境界挙動は非常に複雑であることが近年分かってきた．以下では $\overline{MP(M)}$ のトポロジーに注目して話を進める．

$MP(M)$ は一般には幾つかの（場合によっては無限個の）連結成分を持ち，その連結成分の集合は集合 $\mathcal{A}(M)$ と 1 : 1 対応がつく．ここで $\mathcal{A}(M)$ は組 (M', h') の同値類の集合である：M' は3次元多様体，$h' : M \to M'$ はホモトピー同値写像で，(M_1, h_1) と (M_2, h_2) が同値であるとは同相写像 $j : M_1 \to M_2$ が存在して $j \circ h_1$ と h_2 がホモトピックになるときをいう．Anderson-Canary-McCullogh [4] によって $MP(M)$ の２つの連結成分の閉包が接するためのトポロジカルな必要十分条件が与えられている．また同論文 [4] において $MP(M)$ が無限個の連結成分を持つための必要十分条件も与えられている．

また最近，Bromberg-Holt [6] によって $MP(M)$ の各連結成分が自己接触 (self-bumping) するための十分条件が与えられた：

Theorem 1.1 (Bromberg-Holt [6]). M は *compact, orientable, atoroidal, irreducible* な3次元多様体とする．*Annulus* から M への *essential, proper* な *embedding* で *core curve* が ∂M の *torus component* にホモトピックでないものが存

在するとき，$MP(M)$ の各連結成分は自己接触する：すなわち $MP(M)$ の任意の連結成分 B に対してある元 $[\rho] \in \partial B$ が存在して $[\rho]$ の十分小さい任意の近傍 U に対して $U \cap B$ は非連結となる.

2 曲面上の射影構造と擬フックス群空間

S は向き付け可能な種数 2 以上の閉曲面とする．以下ではもっぱら $M = S \times [0,1]$ の場合を考える．表現空間 $R(S) \doteq \mathrm{Hom}(\pi_1(S), \mathrm{PSL}_2(\mathbf{C}))/\mathrm{PSL}_2(\mathbf{C})$ において，忠実で離散的な表現の共役類の集合を $AH(S)$ と書く．$\mathrm{int}AH(S)$ を $QF(S)$ と書き，擬フックス群空間とよぶ．$QF(S) = MP(S \times [0,1])$ であり，$QF(S)$ は唯一つの連結成分から成る．$QF(S)$ には Teichmüller 空間 $T(S)$ の直積からの自然な同相写像 $\mathrm{qf}: T(S) \times T(S) \to QF(S)$ が存在する．$R(S)$ における $QF(S)$ の境界挙動を調べるには，$R(S)$ の「不変被覆もどき」である射影構造空間 $P(S)$ に持ち上げて考えることがしばしば有用である.

S 上の射影構造とは $(\hat{\mathbf{C}}, \mathrm{PSL}_2(\mathbf{C}))$-構造; すなわち, 局所的に $\hat{\mathbf{C}}$ をモデルとし, その張り合わせ写像が Möbius 写像であるような極大局所座標系のことである. S 上の marking 込みの射影構造全体の空間 $P(S)$ は $T(S)$ の正則余接バンドルと同一視できる. $Y \in P(S)$ に対して, developing map $f_Y : \tilde{Y} \to \hat{\mathbf{C}}$ ($\tilde{Y}$ は Y の普遍被覆) が定まり, この写像が誘導する準同型 $\rho_Y : \pi_1(S) \to \mathrm{PSL}_2(\mathbf{C})$ をホロノミー表現と呼ぶ. ここで $Y \in P(S)$ にそのホロノミー表現の共役類 $[\rho_Y]$ を対応させることで, ホロノミー写像

$$\mathrm{hol} : P(S) \to R(S) = \mathrm{Hom}(\pi_1(S), \mathrm{PSL}_2(\mathbf{C}))/\mathrm{PSL}_2(\mathbf{C})$$

を定めると, これは局所同相な正則写像であることが知られている. ここでは, 主に $P(S)$ の部分集合 $Q(S) = \mathrm{hol}^{-1}(QF(S))$ を考察する. $Q(S)$ の任意の連結成分 $\mathcal{Q}$ に対して $\mathrm{hol}|\mathcal{Q} : \mathcal{Q} \to QF(S)$ は双正則写像である. さらに Goldman [7] によるフックス群ホロノミーをもつ射影構造の (grafting を用いた) 特徴付けより, $Q(S)$ の連結成分全体は measured lamination の集合 $\mathcal{ML}(S)$ の整数点全体 $\mathcal{ML}_{\mathbf{Z}}(S)$ と 1 対 1 対応がつくことがわかる. ここで

$$\mathcal{ML}_{\mathbf{Z}}(S) = \{\lambda \in \mathcal{ML}(S) : \lambda = \sum n_j C_j,\ n_j \in \mathbf{N},\ C_j \text{は単純閉曲線}\}.$$

$Q(S)$ の元で, その developing map が単射であるものを standard, そうでないものを exotic と呼ぶ. いま $\lambda \in \mathcal{ML}_{\mathbf{Z}}(S)$ に対応する $Q(S)$ の連結成分を $\mathcal{Q}_\lambda$ と書くと，$Q(S)$ の連結成分分解

$$Q(S) = \coprod_{\lambda \in \mathcal{ML}_{\mathbf{Z}}(S)} \mathcal{Q}_\lambda.$$

を得る．$\mathcal{Q}_0$ は standard な射影構造より成る唯一の連結成分である．$Q(S)$ の異なる成分が接していると，ホロノミー写像 $\mathrm{hol} : P(S) \to R(S)$ の局所同相性から $QF(S)$ の自己接触がいえることに注意されたい.

Anderson-Canary [2] のテクニックを用いて，McMullen は $QF(S)$ が自己接触していることを示した．

Theorem 2.1 (McMullen [13]). *exotic* な射影構造の列で，$\partial\mathcal{Q}_0$ の点に収束するものが存在する．従って $\overline{QF(S)}$ は境界付き多様体ではない．

Remark. 前述の Bromberg-Holt [6] の結果はこの定理を含んでいる．$QF(S)$ に限定しても，射影構造を用いずにその自己接触を示した所が彼らの仕事の特筆すべき点である．

以下の結果は McMullen の結果を精密化したものである．

Theorem 2.2 ([8]). 有限集合 $\{\lambda_i\}_{i=1}^m \subset \mathcal{ML}_{\mathbf{Z}}(S)-\{0\}$ で任意の $j,k\in\{1,\dots,m\}$ が $i(\lambda_j,\lambda_k)=0$ をみたすものに対して $\overline{\mathcal{Q}_0}\cap\overline{\mathcal{Q}_{\lambda_1}}\cap\cdots\cap\overline{\mathcal{Q}_{\lambda_m}}\neq\emptyset$ が成り立つ．ここで $i(\cdot,\cdot)$ は幾何学的交点数を表す．特に，任意の $\lambda\in\mathcal{ML}_{\mathbf{Z}}(S)-\{0\}$ に対して $\overline{\mathcal{Q}_0}\cap\overline{\mathcal{Q}_\lambda}\neq\emptyset$ が成り立つ．従って $P(S)$ における $Q(S)$ の閉包 $\overline{Q(S)}$ は連結である．

Corollary 2.3 ([8]). 任意の自然数 $n\in\mathbf{N}$ に対してある点 $[\rho]\in\partial QF(S)$ が存在して，$[\rho]$ の十分小さな任意の近傍 U に対して $U\cap QF(S)$ の連結成分は n 個以上となる．

次の定理は $\mathcal{Q}_\lambda$ から腕が 2 本伸びて $\mathcal{Q}_0$ にぶつかることを示している．

Theorem 2.4 ([9]). 任意の $\lambda\in\mathcal{ML}_{\mathbf{Z}}(S)-\{0\}$ に対してある $Y\in\overline{\mathcal{Q}_0}\cap\overline{\mathcal{Q}_\lambda}$ が存在して，Y の十分小さい任意の近傍 U に対して $U\cap\mathcal{Q}_\lambda$ は非連結となる．特に $\overline{\mathcal{Q}_\lambda}$ は境界付き多様体ではない．

この定理より $QF(S)$ の自己接触は $P(S)$ に持ち上げたときにすべて解消されているわけではないことが分かる．$\mathcal{Q}_0$ に持ち上げたときはどうかが自然に問題になる．

Problem 2.5. $\overline{\mathcal{Q}_0}$ は境界付き多様体か？

Theorem 2.2 と Theorem 2.4 の証明の手法を合わせると次が証明できる．

Theorem 2.6 ([9]). 任意の $\lambda,\mu\in\mathcal{ML}_{\mathbf{Z}}(S)-\{0\}$ に対して $\overline{\mathcal{Q}_\lambda}\cap\overline{\mathcal{Q}_\mu}\neq\emptyset$ が成り立つ．

3 代数的極限と幾何的極限が異なる例

クライン群 Γ に対して $N_\Gamma=\mathbf{H}^3/\Gamma$ とする．Γ の不連続領域を $\Omega(\Gamma)$, 極限集合を $\Lambda(\Gamma)$ と書く．クライン群 Γ が *b*-group であるとは，$\Omega(\Gamma)$ が唯一つの Γ-不変成分 $\Omega_0(\Gamma)$ をもち，$\Omega_0(\Gamma)$ が単連結のときをいう．

クライン群の列 Γ_n が $\hat{\Gamma}$ に幾何的に収束するとは，$PSL_2(\mathbf{C})$ の中で Γ_n が $\hat{\Gamma}$ に Hausdorff 収束するときをいう．G は torsion-free で非可換な有限生成群であるとし，忠実で離散的な表現の列 $\rho_n : G \to \Gamma_n$ が $\rho : G \to \Gamma$ に代数的に収束するとする．このとき，部分列をとれば Γ_n は $\hat{\Gamma}$ に幾何的に収束し，$\hat{\Gamma}$ はクライン群で $\Gamma \subset \hat{\Gamma}$ が成り立つ.

ここでは quasi-Fuchsian group の列に限定して，その代数的極限と幾何的極限が異なる例を3つ挙げる．前節の Theorem 2.1-2.6 の証明には，もっぱら Example 2 のタイプの表現列を用いる.

Example 1 (Kerckhoff-Thurston [11]). c を S の simple closed curve とし，$\tau = \tau_c$ を c に関する Dehn twist とする．$(X, X') \in QF(S)$ を1つとり

$$[\rho_n] = \mathrm{qf}(X, \tau^n X') \in QF(S)$$

という列を考えると，この列は収束する部分列を持ち，その極限を $[\rho] \in \partial QF(S)$ とする．いま代表元 $\rho_n : \pi_1(S) \to \Gamma_n$ が $\rho : \pi_1(S) \to \Gamma$ に代数的に収束するとしてよい．必要なら部分列をとれば Γ_n は $\hat{\Gamma}$ に幾何的に収束する．Γ は geometrically finite b-group で，$\hat{\Gamma}$ は rank 2 parabolic subgroup を含んでいる．$N_{\hat{\Gamma}} \cong \mathrm{int}(S \times [0,1] - c \times \{1/2\})$ である．$\pi : N_\Gamma \to N_{\hat{\Gamma}}$ を covering map とするとき，N_Γ の compact core M で $\pi|M$ が単射になるものが存在する.

Example 2 (Anderson-Canary [2]). Example 1 と同様にして，今回は

$$[\rho_n] = \mathrm{qf}(\tau^n X, \tau^{2n} X') \in QF(S)$$

という列を考える．この列も $R(S)$ の中で収束する部分列をもち，その極限を $[\rho] \in \partial QF(S)$ とする．いま代表元 $\rho_n : \pi_1(S) \to \Gamma_n$ が $\rho : \pi_1(S) \to \Gamma$ に代数的に収束するとしてよい．必要なら部分列をとれば Γ_n は $\hat{\Gamma}$ に幾何的に収束する．Γ は geometrically finite b-group で，$\hat{\Gamma}$ は rank 2 parabolic subgroup を含んでいる．$N_{\hat{\Gamma}} \cong \mathrm{int}(S \times [0,1] - c \times \{1/2\})$ である．$\pi : N_\Gamma \to N_{\hat{\Gamma}}$ を covering map とするとき，N_Γ の compact core M に対し $\pi|M$ は rank 2 cusp を1回まわっている．特に $\pi|M$ は単射でない.

Example 3 (Brock [5]). 図1のように simple closed curve a, b をとる．τ_a, τ_b をそれぞれ a, b に関する Dehn twist とし，$\sigma = \tau_a \circ \tau_b$ と定める．τ は partially pseudo-Anozov map である．$(X, X') \in QF(S)$ を1つとり

$$[\rho_n] = \mathrm{qf}(X, \sigma^n X') \in QF(S)$$

という列を考えると，この列は収束する部分列をもち，その極限を $[\rho] \in \partial QF(S)$ とする．いま代表元 $\rho_n : \pi_1(S) \to \Gamma_n$ が $\rho : \pi_1(S) \to \Gamma$ に代数的に収束するとしてよい．必要なら部分列をとれば Γ_n は $\hat{\Gamma}$ に幾何的に収束する．Γ は partially degenerate b-group で，$N_{\hat{\Gamma}} \cong \mathrm{int}(S \times [0,1] - T \times \{1/2\})$ となる．今回は $\hat{\Gamma}$ は rank 2 parabolic subgroup を含まない．$\pi : N_\Gamma \to N_{\hat{\Gamma}}$ を covering map とするとき，N_Γ の compact core M で $\pi|M$ が単射になるものが存在する.

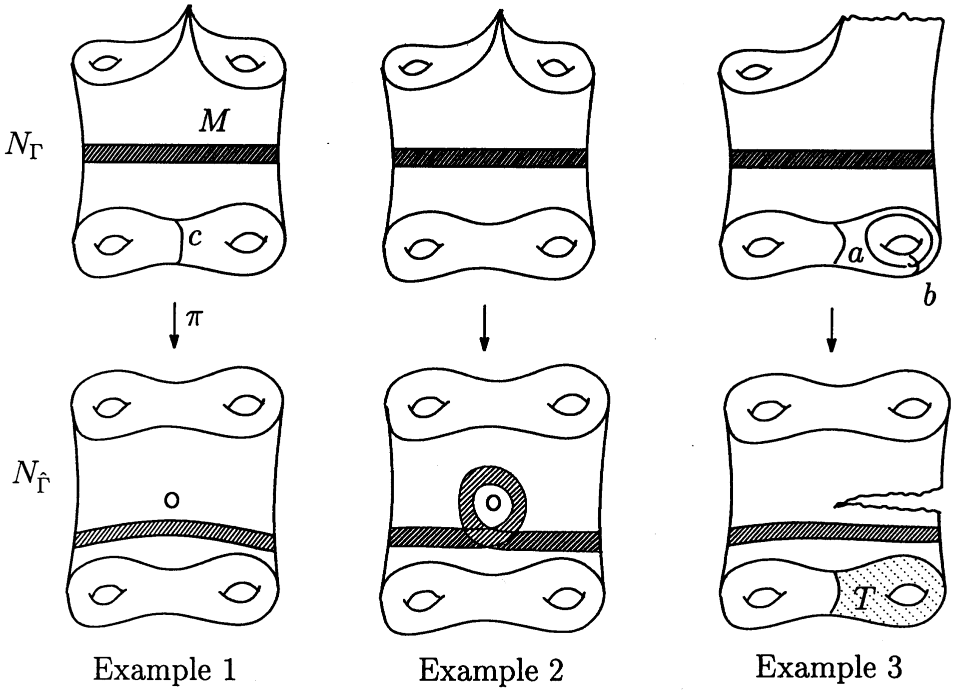

図 1:

4 主張と問題

Anderson-Canary [2] や Bromberg-Holt [6] によって示されたクライン群の変形空間の（自己）接触の現象において，クライン群の列で代数的極限 Γ と幾何的極限 $\hat{\Gamma}$ が異なるものが本質的な役割を果たしている．さらにいえば，$\pi : N_\Gamma \to N_{\hat{\Gamma}}$ を covering map とするとき，N_Γ の任意の compact core M に対して $\pi|M$ が単射とはならないような状況がもっぱら用いられている．

ここでは擬フックス群の列に限定して，N_Γ の compact core が単射に落ちない状況を詳しく調べる．この節では次の状況を考える：

「忠実な表現 $\rho_n : \pi_1(S) \to \Gamma_n$ が $\rho : \pi_1(S) \to \Gamma$ に代数的に収束するとする．Γ_n は quasi-Fuchsian group で，Γ は b-group とする．さらに Γ_n は $\hat{\Gamma}$ に幾何的に収束するとする．このとき $\Gamma \subset \hat{\Gamma}$ であり，対応する covering map を $\pi : N_\Gamma \to N_{\hat{\Gamma}}$ と書く．$Y \in \partial \mathcal{Q}_0 \subset P(S)$ を $\mathrm{hol}(Y) = [\rho]$ となるようにとり，$Y_n \in P(S)$ は $Y_n \to Y$ $(n \to \infty)$ かつ $\mathrm{hol}(Y_n) = [\rho_n]$ をみたす列とする.」

Lemma 4.1 ([8]). 次の条件は同値である：

(1) n が十分大きいとき Y_n は *exotic,*
(2) $\Omega_0(\Gamma) \cap \Lambda(\hat{\Gamma}) \neq \emptyset$.

目標としては上の補題の同値条件に次の条件を付け加えることである：

(3) N_Γ の任意の compact core M に対して $\pi|M$ は単射ではない．

(3) ⇒ (2) を以下で説明する．(2) ⇒ (3) はまだ証明が付いていない予想である．

次の定理は (3) ⇒ (2) を示すと同時に，代数的極限 Γ の幾何的極限 $\hat{\Gamma}$ の中への入り方がある程度限定されたものであることを示している．

Theorem 4.2. N_Γ の任意の *compact core* M に対して $\pi|M$ が単射でないとする．このとき次が成り立つ：

(1) ある *doubly cusped parabolic element* $\gamma \in \Gamma$ とある *parabolic element* $\delta \in \hat{\Gamma} - \Gamma$ が存在して $\langle \gamma, \delta \rangle \subset \hat{\Gamma}$ は *rank 2 parabolic subgroup* で，N_Γ の任意の *compact core* M に対して $\pi|M(M)$ はこの *rank 2 cusp* に何回か巻きついている．すなわち $\pi|M(M) \subset N_{\hat{\Gamma}}$ は δ の共役類に対応する *closed curve* を含んでいる．

(2) $\Omega_0(\Gamma) \cap \Lambda(\hat{\Gamma}) \neq \emptyset$ が成り立つ．

ここで parabolic element $\gamma \in \Gamma$ が doubly cusped であるとは，Γ の共役をとって $\gamma(z) = z + 1$ としたときに，ある $a, b \in \mathbf{R}$ $(a < b)$ が存在して $\Lambda(\Gamma) - \{\infty\} \subset \{z \in \mathbf{C} | a < \mathrm{Im} z < b\}$ が成り立つときをいう．

Corollary 4.3. Γ が *doubly cusped parabolic element* を含まないならば，N_Γ のある *compact core* M に対して $\pi|M$ が単射となる．$\Omega_0(\Gamma) \cap \Lambda(\hat{\Gamma}) = \emptyset$ ならば N_Γ のある *compact core* M に対して $\pi|M$ が単射となる．

(3) ⇒ (2) ⇒ (1) より次の主張を得る．

Corollary 4.4. N_Γ の任意の *compact core* M に対して $\pi|M$ が単射でないならば，n が十分大きいとき Y_n は *exotic* である．

これを言い換えると次のようになる．

Corollary 4.5. $\{Y_n\}$ がスタンダードな射影構造の列であれば，N_Γ のある *compact core* M に対して $\pi|M$ が単射となる．特に $\{[\rho_n]\} \subset QF(S)$ がある *Bers slice* に含まれていれば N_Γ のある *compact core* M に対して $\pi|M$ が単射となる．

(2) ⇒ (3) であろうと予想される．

Problem 4.6. N_Γ のある *compact core* M に対して $\pi|M$ が単射であるとき，$\Omega_0(\Gamma) \cap \Lambda(\hat{\Gamma}) = \emptyset$ がいえるか？

これを言い換えると次のようになる．

Problem 4.7. N_Γ のある *compact core* M に対して $\pi|M$ が単射であるとき，N_Γ の $\Omega_0(\Gamma)/\Gamma$ に対応する *end* の近傍 U で $\pi|U$ が単射となるものが存在するか？

これが言えると Theorem 4.2 より，exotic な点列の極限となる ∂Q_0 の元は doubly cusped parabolic element を持つことが必要であることがわかる．

5 代数的極限と幾何的極限

本節では，クライン群の代数的極限が幾何的極限にどのように入っているかを一般的な状況で調べる．本節で述べる主張を用いて次節で Theorem 4.2 の証明をする．

本節では常に次の状況を仮定する：

「G は torsion-free で非可換な有限生成群であるとする．忠実で離散的な表現の列 $\rho_n : G \to \Gamma_n$ が $\rho : G \to \Gamma$ に代数的に収束するとする．さらに Γ_n は $\hat{\Gamma}$ に幾何的に収束するとする．$N_\Gamma = \mathbf{H}^3/\Gamma, N_{\hat{\Gamma}} = \mathbf{H}^3/\hat{\Gamma}$ とし $\pi : N_\Gamma \to N_{\hat{\Gamma}}$ を covering map とする.」

始めに基本となる補題を述べる．

Lemma 5.1 (Jørgensen-Marden [10]). $\gamma \in \hat{\Gamma}$ に対して $\gamma^k \in \Gamma$ ならば $\gamma \in \Gamma$ である．

Proof. $\exists\gamma \in \hat{\Gamma}$ s.t. $\gamma^k \in \Gamma$ とする．$\exists g_n \in G$ s.t. $\rho_n(g_n) \to \gamma$ より $\rho_n(g_n^k) \to \gamma^k \in \Gamma$. ここで $\exists h \in G$ s.t. $\rho_n(h) \to \gamma^k$ なので $\rho_n(h^{-1}g_n^k) \to \mathrm{id}$. 従って十分大きな n に対して $h^{-1}g_n^k \equiv \mathrm{id}$. （ここで ρ_n の単射性が効いている.）よって $g_n^k = h$ であるが，G は torsion-free なクライン群 Γ と同型であるので h の k 乗根は一意的に定まる．従って $g_n \equiv \exists g$ $(n \gg 0)$ であり，$\gamma \in \Gamma$. □

次の定理は，クライン群の代数的極限 Γ が幾何的極限 $\hat{\Gamma}$ にどのように入っているかを調べる上で，非常に有用である．(Matsuzaki-Taniguchi [12] Theorem 7.25 参照.)

Theorem 5.2 (Anderson-Canary-Culler-Shalen [3]). *(1)* 任意の $\gamma \in \hat{\Gamma} - \Gamma$ に対して $\Gamma \cap \gamma\Gamma\gamma^{-1}$ は $\{\mathrm{id}\}$ か *rank 1 parabolic subgroup* である．$\Gamma \cap \gamma\Gamma\gamma^{-1} \neq \{\mathrm{id}\}$ のときは $\{p\} = \mathrm{Fix}(\Gamma \cap \gamma\Gamma\gamma^{-1})$ に対して $\Gamma \cap \gamma\Gamma\gamma^{-1} = \mathrm{Stab}_\Gamma(\{p\}) \cong \mathbf{Z}$ と $\mathrm{Stab}_{\hat{\Gamma}}(\{p\}) \cong \mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}$ が成り立つ．また $\rho(a) = \gamma\rho(b)\gamma^{-1}$ であるとき，ある $\gamma_0 \in \Gamma$ が存在して $\rho(a) = \gamma_0\rho(b)\gamma_0^{-1}$ となる．

(2) $\gamma \in \hat{\Gamma} - \Gamma$ に対して $\langle \rho(a), \gamma\rho(b)\gamma^{-1} \rangle \cong \mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}$ とはならない．

Proof. (1) $\Gamma \cap \gamma\Gamma\gamma^{-1} \neq \emptyset$ とする．$\exists a, b \in G - \{\mathrm{id}\}$ s.t. $\rho(a) = \gamma\rho(b)\gamma^{-1} \in \Gamma \cap \gamma\Gamma\gamma^{-1}$. $\exists g_n \in G$ s.t. $\rho_n(g_n) \to \gamma$. ここで $\rho_n(g_n^{-1}ag_n) \to \rho(b)$, $\rho_n(b) \to \rho(b)$ より $\exists n_0 \in \mathbf{Z}$ s.t. $g_n^{-1}ag_n \equiv b$ $(n \geq n_0)$. （特に $g_{n_0}^{-1}ag_{n_0} = b$ より $\rho(a)$ と $\rho(b)$ は Γ の中で共役.）従って $\forall n \geq n_0$ に対して $g_n g_{n_0}^{-1}$ は a と可換．ここで $n \to \infty$ として $\delta := \gamma\rho(g_{n_0}^{-1})$ は $\rho(a)$ と可換．$\delta \in \hat{\Gamma} - \Gamma$ に注意する．

ここで $\langle \delta, \rho(a) \rangle \equiv \mathbf{Z}$ とすると $\exists k, l \in \mathbf{Z}$ s.t. $\delta^k = \rho(a)^l \in \Gamma$ であるので Lemma 5.1 より $\delta \in \Gamma$ となり矛盾．従って $\langle \delta, \rho(a) \rangle \equiv \mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}$ となり $\rho(a)$ は parabolic. よって $\Gamma \cap \gamma\Gamma\gamma^{-1}$ は purely parabolic である．また $\mathrm{Stab}_{\hat{\Gamma}}(\{p\}) \cong \mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}$ もわかる．

いま $\mathrm{Stab}_\Gamma(\{p\}) \cong \mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}$ であるとすると $\exists a' \in G$ s.t. $\langle \rho(a), \rho(a') \rangle \cong \mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}$. このとき $\delta \in \mathrm{Stab}_{\hat{\Gamma}}(\{p\})$ と $\mathrm{Stab}_{\hat{\Gamma}}(\{p\}) : \langle \rho(a), \rho(a') \rangle] < \infty$ より $\exists k, l, m \in \mathbf{Z}$

s.t. $\delta^k = \rho(a)^l\rho(a')^m \in \Gamma$. よって Lemma 5.1 より $\delta \in \Gamma$ となり矛盾. 従って $\mathrm{Stab}_\Gamma(\{p\}) \cong \mathbf{Z}$. 特に $\Gamma\cap\gamma\Gamma\gamma^{-1} \subset \mathrm{Stab}_\Gamma(\{p\}) \cong \mathbf{Z}$ であるので $\Gamma\cap\gamma\Gamma\gamma^{-1}$ は rank 1 parabolic subgroup.

いま $g \in G$ に対して $\exists k \in \mathbf{Z}$ s.t. $\rho(g)^k \in \Gamma\cap\gamma\Gamma\gamma^{-1}$ であると仮定する. このとき $\rho(g)^k = \gamma\rho(h)\gamma^{-1}$ と書ける. これから $(\gamma^{-1}\rho(g)\gamma)^k = \rho(h) \in \Gamma$ なので $\gamma^{-1}\rho(g)\gamma = \rho(f) \in \Gamma$ となる. 従って $\rho(g) = \gamma\rho(f)\gamma^{-1}$ より $\rho(g) \in \Gamma\cap\gamma\Gamma\gamma^{-1}$ である. よって $\Gamma\cap\gamma\Gamma\gamma^{-1} = \mathrm{Stab}_\Gamma(\{p\})$.

(2) ここで $a, b \in G$ は primitive な元としてよい. $\langle\rho(a), \gamma\rho(b)\gamma^{-1}\rangle \cong \mathbf{Z}\oplus\mathbf{Z}$ と仮定する. このとき $\rho(a)$ は parabolic であり, $\{p\} = \mathrm{Fix}(\rho(a))$ とする.

$\mathrm{Stab}_\Gamma(\{p\}) \cong \mathbf{Z}\oplus\mathbf{Z}$ であるとすると, Lemma 5.1 より $\mathrm{Stab}_\Gamma(\{p\}) = \mathrm{Stab}_{\hat\Gamma}(\{p\})$ が成り立つ. 従って $\gamma\rho(b)\gamma^{-1} = \rho(c)$ $(\exists c \in G)$ となり, (1) と同じ議論により $\exists\delta \in \hat\Gamma - \Gamma$ s.t. $\langle\delta, \rho(c)\rangle \cong \mathbf{Z}\oplus\mathbf{Z}$. しかし, 一方で $\mathrm{Stab}_\Gamma(\{p\}) = \mathrm{Stab}_{\hat\Gamma}(\{p\})$ より $\delta \in \Gamma$ となり矛盾.

従って $\mathrm{Stab}_\Gamma(\{p\}) = \langle\rho(a)\rangle \cong \mathbf{Z}$ が成り立ち, 同様にして $\mathrm{Stab}_{\gamma\Gamma\gamma^{-1}}(\{p\}) = \langle\gamma\rho(b)\gamma^{-1}\rangle \cong \mathbf{Z}$ も成り立つ. 特に G において a の中心化群は a で生成される巡回群であり, b についても同様であることに注意する.

いま $\rho_n(g_n) \to \gamma$ とする. $\rho(a)$ と $\gamma\rho(b)\gamma^{-1}$ が可換なので, $n \geq n_0$ に対して $g_n^{-1}ag_n$ と b は可換である. 従って $g_n^{-1}ag_n$ は b の冪乗である. ここで $g_n^{-1}ag_n$ は全て共役であり, b の異なる冪乗は共役ではないことから $g_n^{-1}ag_n \equiv g_{n_0}^{-1}ag_{n_0}$ が成り立ち, $g_ng_{n_0}^{-1}$ は a と可換である. 従って $\gamma\rho(g_{n_0}^{-1})$ は $\rho(a)$ と可換. よって $\gamma\rho(g_{n_0}^{-1}) = (\gamma\rho(b)\gamma^{-1})^l\rho(a)^m = \gamma\rho(b^l)\gamma^{-1}\rho(a^m)$ と書けるので, $\gamma = \rho(a^lg_{n_0}b^m) \in \Gamma$ となり矛盾. □

Corollary 5.3 (Anderson-Canary-Culler-Shalen [3]). Γ は *topologically tame* であるとする. このとき, 任意の $\gamma \in \hat\Gamma - \Gamma$ に対して $\Lambda(\Gamma)\cap\Lambda(\gamma\Gamma\gamma^{-1}) = \Lambda(\Gamma\cap\gamma\Gamma\gamma^{-1})$ が成り立つ. 特に $\Lambda(\Gamma)\cap\Lambda(\gamma\Gamma\gamma^{-1})$ は空集合か *parabolic fixed point* 1 点からなる.

いま ϵ を Margulis 定数よりも小さい数とする. N_Γ の ϵ-thin cusp part を $(N_\Gamma)_{\mathrm{cusp}}$ と書く. また $(N_\Gamma)_0 = N_\Gamma - (N_\Gamma)_{\mathrm{cusp}}$ とおく.

始めに $(N_\Gamma)_0$ の geometrically infinite end が $N_{\hat\Gamma}$ の中にどのように入るかを見る.

Theorem 5.4 (Thurston, Canary). Γ は *topologically tame* であるとする. このとき, $(N_\Gamma)_0$ の 任意の *geometrically infinite end* E に対してある近傍 U が存在して $\pi|U$ は単射となる.

Theorem 5.2 より, N_Γ の 2 つの closed geodesic が $N_{\hat\Gamma}$ の同じ closed geodesic に落ちることはないので, 次の系を得る.

Corollary 5.5. Γ は *topologically tame* であるとする. $E_1, \ldots, E_k$ を $(N_\Gamma)_0$ の *geometrically infinite end* 全体とするとき, $E_1, \ldots, E_k$ の互いに交わらない近傍 $U_1, \ldots, U_k$ が存在して $\pi|(U_1\cup\cdots\cup U_k)$ は単射となる.

次に $(N_\Gamma)_{\text{cusp}}$ が $N_{\hat{\Gamma}}$ の中にどのように入るかを調べる．ここで $(N_\Gamma)_{\text{cusp}}$ は $\pi : N_\Gamma \to N_{\hat{\Gamma}}$ によって $(N_{\hat{\Gamma}})_{\text{cusp}}$ の中に写されることに注意する．

Lemma 5.6. V_1, V_2 を $(N_\Gamma)_{\text{cusp}}$ の異なる連結成分とする．このとき $\pi(V_1) \cap \pi(V_2) = \emptyset$ が成り立つ．V が *rank 2 parabolic subgroup* の共役類に対応する $(N_\Gamma)_{\text{cusp}}$ の連結成分であるとき，$\pi|V$ は単射である．Γ が *topologically tame* で V が *doubly cusped* でない *rank 1 parabolic subgroup* の共役類に対応する $(N_\Gamma)_{\text{cusp}}$ の連結成分であるとき，$\pi|V$ は単射である．

Proof. $(N_\Gamma)_{\text{cusp}}$ の異なる連結成分 V_1, V_2 に対し，$\pi(V_1) = \pi(V_2)$ と仮定する．$\pi_1(V_i) \subset \Gamma$ に含まれる primitive parabolic element を $\rho(a_i)$ とする $(i = 1, 2)$．このとき Lemma 5.1 より $\rho(a_i)$ は $\hat{\Gamma}$ の中でも primitive である．いまある元 $\gamma \in \hat{\Gamma} - \Gamma$ が存在して $\langle \rho(a_1), \gamma\rho(a_2)\gamma^{-1} \rangle \subset \hat{\Gamma}$ は parabolic subgroup になる．$\langle \rho(a_1), \gamma\rho(a_2)\gamma^{-1} \rangle = \mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}$ とすると Theorem 5.2 (2) に矛盾するので $\rho(a_1) = \gamma\rho(a_2)\gamma^{-1}$ となるが，Theorem 5.2 (1) より $\rho(a_1)$ と $\rho(a_2)$ は Γ の中で共役となり矛盾． $\square$

従って，Γ が topologically tame のとき，$x_1, x_2 \in (N_\Gamma)_{\text{cusp}}$ に対して $\pi(x_1) = \pi(x_2)$ となるならば，doubly cusped parabolic element の共役類に対応する $(N_\Gamma)_{\text{cusp}}$ の連結成分 V が存在して $x_1, x_2 \in V$ となり，$\pi(x_1) = \pi(x_2)$ は $(N_{\hat{\Gamma}})_{\text{cusp}}$ の rank 2 cusp component に含まれる．

3 節の Example で見たように，$(N_\Gamma)_0$ の geometrically finite end が $\pi : N_\Gamma \to N_{\hat{\Gamma}}$ によって単射に落ちるとは限らない．しかし component subgroup が quasi-Fuchsian であるような end に対しては，単射に落ちる core の存在を示すことができる．

Definition 5.7. $(\Phi_1, \ldots, \Phi_q)$ を Γ の中で互いに共役でない quasi-Fuchsian component subgroup の組とする．$(\Phi_1, \ldots, \Phi_q)$ が $\hat{\Gamma}$ の中の precisely embedded system であるとは，各 m に対して $\mathrm{Stab}_{\hat{\Gamma}}(\Lambda(\Phi_m)) = \Phi_m$ であり，任意の $\gamma \in \hat{\Gamma} - \Phi_m$ に対して $\gamma\Lambda(\Phi_m)$ は $\hat{\mathbf{C}} - \Lambda(\Phi_k)$ のある成分の閉包に含まれる $(\forall k)$ ときをいう．$(\Phi_1, \ldots, \Phi_q)$ の spanning disc system $(D_1, \ldots, D_q)$ とは，各 m に対して，D_m は $\mathbf{H}^3$ の中への properly embedded disc であり，$\mathbf{H}^3 \cup \hat{\mathbf{C}}$ における閉包 $\overline{D_m}$ の境界が $\Lambda(\Phi_m)$ に一致し，$\mathrm{Stab}_{\hat{\Gamma}}(D_m) = \Phi_m$ が成り立ち，任意の $\gamma \in \hat{\Gamma} - \Phi_m$ に対して $\gamma(D_m) \cap D_k = \emptyset$ $(\forall k)$ となるものをいう．

Theorem 5.8 (Anderson-Canary [1]). $(\Phi_1, \ldots, \Phi_q)$ を Γ の中で互いに共役でない *quasi-Fuchsian component subgroup* の組とする．このとき $(\Phi_1, \ldots, \Phi_q)$ は $\hat{\Gamma}$ の中の *precisely embedded system* であり，$(\Phi_1, \ldots, \Phi_q)$ の *spanning disc system* $(D_1, \ldots, D_q)$ が存在する．

参考までに，論文 [1] で Anderson-Canary が得た結果を述べる．

Theorem 5.9 (Anderson-Canary [1]). $\Omega(\Gamma) \neq \emptyset$ で，$\Lambda(\Gamma)$ が連結で，Γ が *accidental parabolic element* を含まないとき，N_Γ のある *compact core* M に対して $\pi|M$ が単射となる．

ここで「accidental parabolic element を含まない」という仮定は「doubly cusped accidental parabolic element を含まない」という仮定に置き換えることができると予想される．その部分的な解答が Corollary 4.3 である．しかし「doubly cusped accidental parabolic element を含まない」という仮定は本質的である．すなわち，Γ が doubly cusped accidental parabolic element を含むとき，$\rho : G \to \Gamma$ の擬等角変形 $\rho' : G \to \Gamma'$ で次を満たすものが存在する：忠実で離散的な表現の列 $\rho'_n : G \to \Gamma'_n$ が $\rho' : G \to \Gamma'$ に代数的に収束し，Γ'_n は $\hat{\Gamma}'$ に幾何的に収束し，$\pi' : N_{\Gamma'} \to N_{\hat{\Gamma}'}$ を covering map とするとき，$N_{\Gamma'}$ の任意の compact core M に対して $\pi'|M$ は単射とならない．

最後に問題を一つ提起する．

Problem 5.10. N_Γ のある *compact core* M に対して $\pi|M$ が単射となるとき，N_Γ の *convex core* C_Γ に対して $\pi|C_\Gamma$ は単射 か？

6 Theorem 4.2 の証明

もう一度状況を思い出しておく：

「忠実な表現 $\rho_n : \pi_1(S) \to \Gamma_n$ が $\rho : \pi_1(S) \to \Gamma$ に代数的に収束するとする．Γ_n は quasi-Fuchsian group で，Γ は b-group とする．さらに Γ_n は $\hat{\Gamma}$ に幾何的に収束するとする．いま $\Gamma \subset \hat{\Gamma}$ であり，対応する covering map を $\pi : N_\Gamma \to N_{\hat{\Gamma}}$ と書く．」

Γ は b-group なので $\Omega_0(\Gamma)$ 以外の成分に対応する component subgroup は quasi-Fuchsian group である．また Γ は topologically tame である．

以下の議論は図 2 を参照してほしい．Γ の primitive accidental parabolic element の共役類全体を $[\gamma_1^{\pm 1}], \ldots, [\gamma_r^{\pm 1}]$ とする．それぞれに対応する互いに交わらない S 上の simple closed curve を $c_1, \ldots, c_r$ とする．

$$S - (c_1 \cup \cdots \cup c_r) = (S_1 \cup \cdots \cup S_p) \cup (T_1 \cup \cdots \cup T_q)$$

とする．ただし $\rho(\pi_1(S_i))$ は quasi-Fuchsian group で，$\rho(\pi_1(T_j))$ は totally degenerate group である．$\Phi_i = \rho(\pi_1(S_i))$ とおくと，Theorem 5.8 より $(\Phi_1, \ldots, \Phi_p)$ は $\hat{\Gamma}$ の中の precisely embedded system であり，$(\Phi_1, \ldots, \Phi_p)$ の spanning disc system $(D_1, \ldots, D_q)$ が存在する．$\mathcal{S}_i = (D_i/\Phi_i) \cap (N_\Gamma)_0$ とする．次に $T_1, \ldots, T_q$ に対応する $(N_\Gamma)_0$ の geometrically infinite end $E_1, \ldots, E_q$ の近傍 $U_1, \ldots, U_q$ を $\cup \mathcal{S}_i$ と交わらず $\pi|U_1 \cup \cdots \cup U_q$ が単射となるようにとる (Corollary 5.5)．同相写像 $\phi_j : T_j \times \mathbf{R} \to U_j$ を用いて $\mathcal{T}_j = \phi_j(T_j \times \{0\})$ と定める．$(N_\Gamma)_0$ から $\cup \mathcal{S}_i$ と

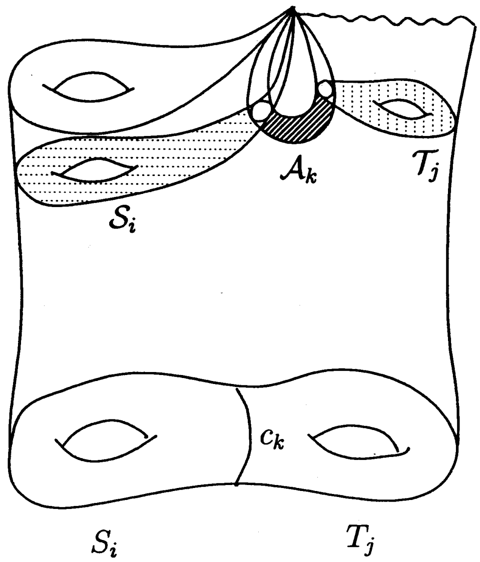

図 2:

$\cup\mathcal{T}_j$ によって $\Omega_0(\Gamma)/\Gamma$ に対応しない end を切り離したものを $(N_\Gamma)_*$ と書くとき，$(N_\Gamma)_* \cap \partial(N_\Gamma)_{\mathrm{cusp}}$ は r 個の annulus $\mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{A}_r$ から成り，$\mathcal{A}_k$ の core curve は N_Γ の中で c_k にホモトピックである．いま

$$\Sigma = (\cup\mathcal{S}_i) \cup (\cup\mathcal{T}_j) \cup (\cup\mathcal{A}_k)$$

とおくと，Σ （に厚みをつけたもの）は N_Γ の compact core になる．

次に $\pi|\Sigma : \Sigma \to N_{\hat{\Gamma}}$ が単射にならない状況を考える．前節で調べたことより，ある $x_1, x_2 \in \Sigma$ に対して $\pi(x_1) = \pi(x_2)$ となるならば，ある k に対して $x_1, x_2 \in \mathcal{A}_k$ であり，γ_k は doubly cusped parabolic element であり，$\pi(x_1) = \pi(x_2)$ は $(N_{\hat{\Gamma}})_{\mathrm{cusp}}$ のある rank 2 cusp component に含まれる．従って γ_k の fixed point を p とするとき，ある parabolic element $\delta \in \hat{\Gamma} - \Gamma$ が存在して $\mathrm{Stab}_{\hat{\Gamma}}(\{p\}) = \langle \gamma_k, \delta \rangle \subset \hat{\Gamma}$ は rank 2 parabolic subgroup となる．いま Γ の２つの quasi-Fuchsian comonent subgroup $\Psi_1, \Psi_2 \subset \Gamma$ が存在して，２つの Jordan curve $\Lambda(\Psi_1), \Lambda(\Psi_2)$ は１点 $\{p\}$ で接している．Ψ_1, Ψ_2 に対応する spanning disc を $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2$ とする．($\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2$ は spanning disc system $(D_1, \ldots, D_q)$ の $\hat{\Gamma}$ の元による像である.) $\Lambda(\Psi_1), \Lambda(\Psi_2), \mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2$ は $\langle \gamma_k \rangle$-invariant である．$(N_\Gamma)_{\mathrm{cusp}}$ の lift で $\{p\}$ に接する horoboll を $\mathcal{H}$ とするとき，$\mathcal{D}_1$ と $\mathcal{D}_2$ に挟まれる $\partial\mathcal{H}$ の領域 $\tilde{\mathcal{A}}_k$ は $\mathcal{A}_k$ の lift である．いま $\mathcal{D}_1$ は $\mathbf{H}^3$ を２つの領域に分けるが $\delta\mathcal{D}_1$ と $\mathcal{D}_2$ は同じ領域に含まれるとしてよい．このとき $\delta\mathcal{D}_1$ が (i) $\mathcal{D}_1$ と $\mathcal{D}_2$ を分離する場合と (ii) そうでない場合がある．(i) の場合，$\tilde{\mathcal{A}}_k \cap \delta\tilde{\mathcal{A}}_k \neq \emptyset$ であるので $\pi|\mathcal{A}_k$ は単射でなく，(ii) の場合，$\tilde{\mathcal{A}}_k \cap \delta\tilde{\mathcal{A}}_k = \emptyset$ であるので $\pi|\mathcal{A}_k$ は単射である．いま $\delta\Lambda(\Psi_1) \subset \Lambda(\delta\Gamma\delta^1)$ であり Corollary 5.3 より $\Lambda(\Gamma) \cap \Lambda(\delta\Gamma\delta^1) = \{p\}$ であるので，$\delta\Lambda(\Psi_1) - \{p\} \subset \Omega(\Gamma)$ である．$\delta\Lambda(\Psi_1) - \{p\}$ は連結なので $\Omega(\Gamma)$ のある成分に含まれている．明らかに (i) の場合は $\delta\Lambda(\Psi_1) - \{p\} \subset \Omega_0(\Gamma)$ であり $\Omega_0(\Gamma) \cap \Lambda(\hat{\Gamma}) \neq \emptyset$ が成り立つ．　□

参考文献

[1] J. W. Anderson and R. D. Canary, *Cores of hyperbolic 3-manifolds and limits of Kleinian groups*, Amer. J. Math. **118** (1996), 745–779.

[2] J. W. Anderson and R. D. Canary, *Algebraic limits of Kleinian groups which rearrange the pages of a book*, Invent. Math. **126** (1996), 205–214.

[3] J. W. Anderson, R. D. Canary, M. Culler and P.B. Shalen, *Free Kleinian groups and volumes of hyperbolic 3-manifolds*, J. Diff. Geom. **44** (1996), 738–782.

[4] J. W. Anderson, R. D. Canary and D. McCullough, *On the topology of deformation spaces of Kleinian groups*, Ann. of Math. **152** (2000), 693–741

[5] J. F. Brock, *Iteration of mapping classes on a Bers slice: examples of algebraic and geometric limits of hyperbolic 3-manifolds*, Contemporary Math. **211** (1997), 81–106.

[6] K. Bromberg and J. Holt, *Self-bumping of deformation spaces of hyperbolic 3-manifolds*, preprint.

[7] W. M. Goldman, *Projective structures with Fuchsian holonomy*, J. Diff. Geom. **25** (1987), 297–326.

[8] K. Ito, *Exotic projective structures and quasi-Fuchsian space*, Duke Math. J. **105** (2000), 185–209.

[9] K. Ito, *Exotic projective structures and quasi-Fuchsian space II*, in preparation.

[10] T. Jørgensen and A. Marden, *Algebraic and geometric convergence of Kleinian groups*, Math. Scand. **66** (1990), 47–72.

[11] S. P. Kerckhoff and W. P. Thurston, *Non-continuity of the action of the modular group at Bers' boundary of Teichmuller space*, Invent. Math. **100** (1990), 25–47.

[12] K. Matsuzaki and M. Taniguchi, *Hyperbolic manifolds and Kleinian groups*, Oxford University Press, 1998.

[13] C. T. McMullen, *Complex earthquakes and Teichmuller theory*, J. Amer. Math. Soc. **11** (1998), 283–320.